Análisis Funcional – Evaluaciones 1 y 2

1. Sea X un espacio normado. Prueba que si la esfera unidad de X, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, es un espacio métrico completo entonces X es un espacio de Banach.

2. Sea X un espacio normado y sea $T : X \to X$ la ffunción definida por:

$$T(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leqslant 1; \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

   Prueba que $\|T(x) - T(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$ parar todos $x, y \in X$.

3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que el conjunto:

$$P = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^p}{a_n^p} < 1 \right\}$$

   está acotado en ℓ_p si, y sólo si, $\{a_n\} \in \ell_\infty$.

4. Sea $x \in \ell_\infty$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, c_0) = \operatorname{lím\,sup} \{|x_n|\}$.